ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Έχουμε ορίσει γενικά σύνθεση σχέσεων κ' εφόσον οι συναρτήσεις είναι σχέσεις εφαρμόζεται επίσης ο ορισμός

Αν $f: A \to B$ κ' $g: \Gamma \to \Delta$ δύο συναρτήσεις

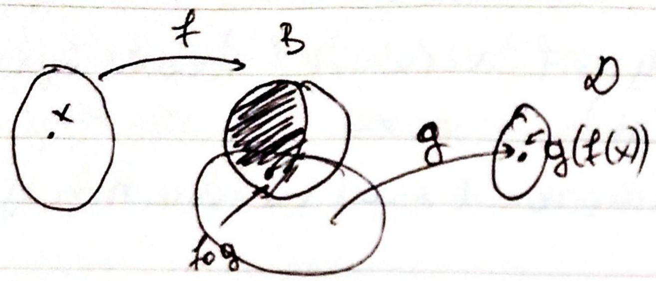
($f \subseteq A \times B$ $\quad g \subseteq \Gamma \times \Delta$) τότε σύμφωνα με τον ορισμό που έχουμε δώσει

$$g \circ f = \{(x,y) \in A \times \Delta \,,\ \exists z \in B \cap \Gamma \quad (x,z) \in f \text{ κ' } (z,y) \in g\}$$

$= \{(x,y) \in A \times \Delta$ $f(x) \in \Gamma$ κ' $y = g(f(x))\}$

Το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ είναι το σύνολο $\{x \in A : f(x) \in \Gamma\}$

κ' ο τύπος της $g\circ f$ είναι $(g\circ f)(x) = g(f(x))$



Σύμβαση:

Συνήθως (κ' αυτό θα θεωρούμε στα επόμενα)

θεωρούμε συναρτήσεις $f: A \to B$ $g: B \to \Gamma$ όταν μας ενδιαφέρει η $g\circ f$.

Σημαντικές παρατηρήσεις

(1) Αν $f: A \to B$ είναι 1-1 κ' $g: B \to \Gamma$ είναι 1-1, τότε η $g\circ f: A \to \Gamma$ είναι 1-1.

Απόδειξη: Έστω $x_1, x_2 \in A$ ώστε $(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2)$

$\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$\xrightarrow{g\ 1\text{-}1} f(x_1) = f(x_2) \xrightarrow{\text{η f είναι 1-1}} x_1 = x_2$

Άρα η $g\circ f$ είναι 1-1

2) Αν $f: A \to B$ είναι επί κ' $g: B \to \Gamma$ είναι επί.

Τότε η $g\circ f$ $A \to \Gamma$ είναι επί

Απόδειξη: Έστω $z \in \Gamma$

Επειδή η g είναι επί $\exists y \in B$ ώστε $g(y) = z$

Επειδή η f είναι επί $\exists x \in A$ ώστε $f(x) = y$

Τότε $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Άρα η $g\circ f$ είναι είναι επί.

3) Αν οι $f: A \to B$ κ' $g: B \to \Gamma$ είναι 1-1 κ' επί
Τότε $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με τα προηγούμενα η f είναι αντιστρέψιμη
η g είναι αντιστρέψιμη.

κ' η $g \circ f: A \to \Gamma$ είναι 1-1 κ' επί, άρα αντιστρέψιμη.
Άρα ορίζεται η συνάρτηση
$(g \circ f)^{-1}: \Gamma \to A$.

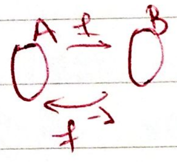
$f^{-1}: B \to A$
$g^{-1}: \Gamma \to B$ άρα ορίζεται
η $f^{-1} \circ g^{-1}: \Gamma \to A$.

Έστω τυχαίο $z \in \Gamma$. Θέτουμε $y = g^{-1}(z)$ κ' $x = f^{-1}(y)$, τότε $f(x) = y$ κ' $g(y) = z$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$
Άρα $(g \circ f)^{-1}(z) = x = f^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$

4) Αν A ένα σύνολο η ταυτοτική συνάρτηση $i_A: A \to A$
$(i_A(x) = x, \forall x \in A)$ είναι 1-1 κ' επί κ' $i_A^{-1} = i_A$

5) Αν $f: A \to B$ 1-1 κ' επί
(οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: B \to A$)



Τότε $f^{-1} \circ f = i_A$ κ' $f \circ f^{-1} = i_B$

Απόδειξη: Έστω τυχαίο $x \in A$. Θέτουμε $y = f(x)$. Τότε $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) =$
$= f^{-1}(y) = x = i_A(x)$
Άρα $\boxed{f^{-1} \circ f = i_A}$

Έστω τυχαίο $y \in B$. Θέτουμε $x = f^{-1}(y)$. Τότε $x \in A$ κ' $f(x) = y$.

$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = i_B(y)$

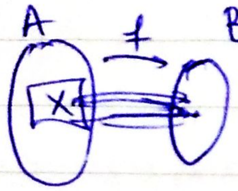
Άρα $f \circ f^{-1} = i_B$

ΕΙΚΟΝΑ κ' ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΕΙΚΟΝΑ ΣΥΝΟΛΟΥ ΜΕΣΩ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΙΚΟΝΑ ΣΥΝΟΛΟΥ ΜΕΣΩ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω $f: A \to B$ μία συνάρτηση

κ' $X \subseteq A$

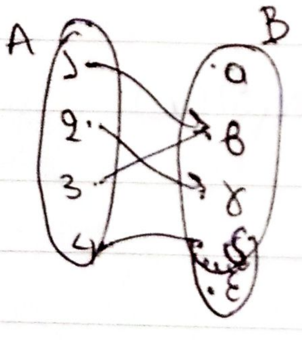


Ορίζουμε $f(X) = \{y \in B : \exists x \in X.\ y = f(x)\}$

δηλαδή το $f(X)$ αποτελείται από στοιχεία του B που είναι εικόνες της μορφής $f(x)$ για $x \in X$.

$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$

π.χ.



$f(\{1,3\}) = \{\beta\}$

$f(\{1,4\}) = \{\beta, \delta\}$

$f(\emptyset) = \emptyset$

$f(\{1,2,3\}) = \{\beta, \gamma\}$

Έστω $f: A \to B$ προφανείς ιδιότητες

$f(\emptyset) = \emptyset$

$f(X) \subseteq B,\ \forall X \subseteq A$

$f(\{x\}) = \{f(x)\}$

Για $y \in B$ $\quad y \in f(X) \Leftrightarrow \exists x \in X\ f(x) = y$

$y \notin f(X) \Leftrightarrow \forall x \in X\ f(x) \neq y$

Ιδιότητες: Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση

$X \subseteq A,\ Y \subseteq A$

Τότε (i) $X \subseteq Y \Rightarrow f(X) \subseteq f(Y)$

(ii) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

(iii) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

(iv) $f(X - Y) \supseteq f(X) - f(Y)$

Απόδειξη: (i) Υποθέτουμε ότι $X \subseteq Y$. Νδο $f(X) \subseteq f(Y)$

Έστω $y \in f(X)$ τότε $\exists x \in X$ ώστε $f(x) = y$

Εφόσον $X \subseteq Y$ έχουμε $x \in Y$

Αφού $y = f(x)$ και $x \in Y$ έχουμε $y \in f(X)$.

Συνεπώς $f(X) \subseteq f(Y)$

(ii) $$\left.\begin{array}{l} X \cap Y \subseteq X \\ X \cap Y \subseteq Y \end{array}\right\} \xrightarrow{(i)} \begin{array}{l} f(X \cap Y) \subseteq f(X) \\ f(X \cap Y) \subseteq f(Y) \end{array}$$

$$f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$$

(iii) $$\left.\begin{array}{l} X \subseteq X \cup Y \\ Y \subseteq X \cup Y \end{array}\right\} \xrightarrow{(i)} \left.\begin{array}{l} f(X) \subseteq f(X \cup Y) \\ f(Y) \subseteq f(X \cup Y) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)}$$

Αντίστροφα, αν $y \in f(X \cup Y)$ τότε $\exists x \in X \cup Y$ ώστε $y = f(x)$

Αφού $x \in X \cup Y$ έχουμε $x \in X$ ή $x \in Y$

→ Αν $x \in X$ τότε αφού $y = f(x)$ θα έχουμε $y \in f(X)$, άρα $y \in f(X) \cup f(Y)$

→ Αν $x \in Y$ τότε αφού $y = f(x)$ θα έχουμε $y \in f(Y)$.

Άρα $y \in f(X) \cup f(Y)$

$\boxed{\text{Άρα } f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)}$

Επομένως, $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

Απόδειξη (iv): Έστω $y \in f(X) - f(Y)$

$\Rightarrow y \in f(X)$ κ' $\underbrace{y \notin f(Y)}_{\substack{\forall B \in Y \\ y \neq f(B)}}$

Εφόσον $y \in f(X)$ $\exists x \in X$ ώστε $y = f(x)$ κ' εφόσον $y \notin f(Y)$ προκύπτει ότι $x \notin Y$.

Άρα $x \in X - Y$ κ' εφόσον $y = f(x)$ έχουμε $y = f(X - Y)$.

Επομένως, $f(X - Y) \supseteq f(X) - f(Y)$